

Esercizio 1 Studiare al variare del parametro reale α i limiti delle successioni

$$a_n = \left(\frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \right)^n \frac{e^n + 5 \ln n}{2^n - n^3 + \sqrt{n}},$$

$$b_n = \frac{n^\alpha \cos(n\pi) + \sin(n^\alpha) \ln^2 n}{n^2 + 5}$$

Esercizio 2 Sia a_n una successione limitata che non ha nè massimo nè minimo. Dimostrare che non può essere convergente.

Esercizio 3 Tenendo conto dei sei seguenti limiti notevoli

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin a_n}{a_n} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{a_n} - 1}{a_n} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - \cos a_n}{a_n^2} = \frac{1}{2}, \quad \lim (1 + a_n)^{1/a_n} = e \quad \text{per } a_n \rightarrow 0,$$

si calcolino i limiti delle seguenti successioni

$$\left(1 + \frac{3}{n}\right)^{2n}, \quad \left(2 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}, \quad \frac{\cos\left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - e^{-\frac{1}{\sqrt{n}}}\right) - 1}{\tan\left(\frac{1}{n}\right)}$$

$$\left(\frac{n + \sqrt{n} + 3}{n}\right)^n, \quad \left(1 - \frac{3}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{n\sqrt{n}}{n+1}}, \quad \frac{\sqrt{n+1}}{n} \sin(n!), \quad \frac{(1 - \cos(2^{-n})) \tan(2^{-n}) + 2^{-n}}{2\sqrt[3]{4^{-n}} - \sqrt[3]{2^{-n}}}$$

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln n}, \quad \frac{e^{\cos(1/n)-1} - \cos(1/n)}{\sin^2(1/n)}, \quad \frac{\cos(n+1) \sin(1/n)}{n^3 + n}, \quad \frac{\sin\left(\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}} - 1\right)}{\log\left(1 + \sin^4\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)}$$

Esercizio 4 Siano a_n, b_n due successioni tali che

- $\lim_n a_n = 1$
- $|b_n| < 1$ per ogni n

dimostrare o confutare le seguenti affermazioni

- $\lim_n a_n + b_n = 2$
- $\lim_n \frac{n a_n + b_n}{n+2} = 1$
- esiste N tale che $2 a_n + b_n > 0$ per ogni $n > N$
- esiste N tale che $2 a_n - b_n > 0$ per ogni $n > N$

Esercizio 5 Se una successione a_n è di Cauchy allora

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N / n > N \Rightarrow |a_{n+1} - a_n| < \varepsilon.$$

Dimostrare che il viceversa non è vero.

Esercizio 6 Due successioni x_n, y_n si dicono asintoticamente equivalenti, in simboli $x_n \sim y_n$, se $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{y_n} = 1$

- | | | |
|--|----------------------------|----------------------------|
| 1. $x_n \sim y_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - y_n) = 0$ | <input type="checkbox"/> V | <input type="checkbox"/> F |
| 2. $x_n \sim y_n \Rightarrow x_n + z_n \sim y_n + z_n$ | <input type="checkbox"/> V | <input type="checkbox"/> F |
| 3. $x_n - y_n \rightarrow 0 \Rightarrow x_n \sim y_n$ | <input type="checkbox"/> V | <input type="checkbox"/> F |
| 4. $x_n \sim y_n \Rightarrow e^{x_n} \sim e^{y_n}$ | <input type="checkbox"/> V | <input type="checkbox"/> F |

Esercizio 7 Per qualsiasi numero reale x , la intera parte di x , denotata con $[x]$, è definita come

$$[x] = \max\{m \in \mathbb{Z} \mid m \leq x\}.$$

- | | | |
|---|----------------------------|----------------------------|
| 1. se x_n è convergente, allora è convergente anche $[x_n]$. | <input type="checkbox"/> V | <input type="checkbox"/> F |
| 2. se $[x_n]$ è convergente, allora è convergente anche x_n | <input type="checkbox"/> V | <input type="checkbox"/> F |
| 3. se x_n è divergente (positivamente o negativamente), allora è divergente anche $[x_n]$ | <input type="checkbox"/> V | <input type="checkbox"/> F |
| 4. se $[x_n]$ è divergente (positivamente o negativamente), allora è divergente anche x_n | <input type="checkbox"/> V | <input type="checkbox"/> F |

Esercizio 8 Sia s_n una successione tale che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{s_n - 1}{s_n + 1} = l$$

per $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

- | | | |
|---|----------------------------|----------------------------|
| 1. se $l = 1$ allora s_n ammette limite | <input type="checkbox"/> V | <input type="checkbox"/> F |
| 2. se $l = 0$ allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = 0$. | <input type="checkbox"/> V | <input type="checkbox"/> F |
| 3. l deve essere finito | <input type="checkbox"/> V | <input type="checkbox"/> F |
| 4. se $l = 1$ allora s_n ammette un'estratta convergente. | <input type="checkbox"/> V | <input type="checkbox"/> F |